

العلاقات

Relations

1- الجداء الديكارتي: Cartesian Product

لتكن A و B مجموعتين، إن مجموعة الأزواج (a,b) حيث: $a \in A$ و $b \in B$ تسمى بالجداء

الديكارتي لـ A و B ويرمز لها بالرمز $A \times B$ وتعرف بالشكل التالي:

$$A \times B = \{(a, b) ; a \in A \text{ and } b \in B\}$$

مثال:

لتكن: $A = \{2,5\}$ و $B = \{a, b, c\}$ إن الجداء الديكارتي لـ $A \times B$ و $B \times A$ و $A \times A$ يعطى

بالشكل التالي:

$$A \times B = \{(2, a), (2, b), (2, c), (5, a), (5, b), (5, c)\}$$

$$B \times A = \{(a, 2), (b, 2), (c, 2), (a, 5), (b, 5), (c, 5)\}$$

$$A \times A = \{(2,2), (2,5), (5,2), (5,5)\}$$

ملاحظات:

$$A \times B \neq B \times A$$

(1) إن:

أي أن الجداء الديكارتي يختص بالأزواج المرتبة، وبالتالي فإن الترتيب مهم في المجموعات.

(2) نرمز بـ n لعدد عناصر مجموعة وبالتالي لدينا في المثال:

$$n(A \times B) = 6 = 2 \cdot 3 = n(A) \cdot n(B) \Rightarrow$$

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

تمارين:

تمرين 1: برهن صحة العلاقة

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

البرهان:

$$\forall (a, b) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow a \in A \cup B \wedge b \in C$$

$$\Leftrightarrow (a \in A \vee a \in B) \wedge b \in C$$

$$\Leftrightarrow (a \in A \wedge b \in C) \vee (a \in B \wedge b \in C)$$

$$\Leftrightarrow ((a, b) \in A \times C) \vee ((a, b) \in B \times C)$$

$$\Leftrightarrow (a, b) \in (A \times C) \cup (B \times C)$$

وهو المطلوب.

تمرين 2: برهن صحة العلاقة

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

البرهان:

$$\forall (a, b) \in (A \cap B) \times (C \cap D) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a \in (A \cap B)) \wedge b \in (C \cap D)$$

$$\Leftrightarrow (a \in A \wedge a \in B) \wedge (b \in C \wedge b \in D)$$

$$\Leftrightarrow (a \in A \wedge b \in C) \wedge (a \in B \wedge b \in D)$$

$$\Leftrightarrow ((a, b) \in A \times C) \wedge ((a, b) \in B \times D)$$

$$\Leftrightarrow (a, b) \in (A \times C) \cap (B \times D)$$

وهو المطلوب.

تمرين 3: برهن صحة العلاقة

$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$$

البرهان:

$$\forall (a, b) \in (A \setminus B) \times C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a \in (A \setminus B)) \wedge b \in C$$

$$\Leftrightarrow (a \in A \wedge a \notin B) \wedge b \in C$$

$$\Leftrightarrow (a \in A \wedge b \in C) \wedge (a \notin B \wedge b \in C)$$

$$\Leftrightarrow ((a, b) \in A \times C) \wedge ((a, b) \notin B \times C)$$

$$\Leftrightarrow (a, b) \in (A \times C) \setminus (B \times C)$$

رياضيات متقطعة - محاضرة 1

وهو المطلوب.