حل جمل معادلات جبرية خطية – الطرائق غير المباشرة

1– نظيم مصفوفة:

نظيم المصفوفة $A = \left(a_{ij}\right)$ هو قيمة حقيقية يرمز له بالرمز ||A|| ويحقق الشروط التالية:

1- $||A|| \geq 0$; $||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

2- $||\lambda A|| = |\lambda| . ||A||$

حيث أن λ عدد حقيقي وبشكل خاص $||-A|| = ||A||$

3- $||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$

4- $||A . B|| \leq ||A|| . ||B||$

من أجل المصفوفات نستخدم أحد الأشكال التالية للنظيم:

1– النظيم الأول: القيمة العظمى لمجموع القيم المطلقة لعناصر الأسطر

$$||A||_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

2– النظيم الثاني: القيمة العظمى لمجموع القيم المطلقة لعناصر الأعمدة

$$||A||_2 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

3– النظيم الثالث: النظيم الإقليدي

$$||A||_3 = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}{}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ويمكن تعريف النظيم الإقليدي من المرتبة p بالشكل التالي:

$$||A||_p = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

مثال:

لتكن لدينا المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & -7 & -5 \end{bmatrix}$ والمطلوب إيجاد النظيم الأول والثاني والثالث. أي إيجاد: $\|A\|_1$ و $\|A\|_2$ و $\|A\|_3$.

الحل:

$\|A\|_1 = \max(2+1+4; 5+3+2 ; 6+7+5) = \max(7 ; 10 ; 18) = 18$
$\|A\|_2 = \max(2+5+6; 1+3+7 ; 4+2+5) = \max(13 ; 11 ; 11) = 13$
$\|A\|_3 = (4+1+16+25+9+4 +36+49+25)^{1/2} = (169)^{1/2} =13$

ملاحظة: نظيم المتجهات

من أجل المصفوفات الخاصة التي تمثل متجهات، فإنه يمكننا اعتبار طول المتجه هو نظيم له.

النظيمات المعروفة بالنسبة للمتجهات ما يلي:

1– النظيم الأول : هو القيمة المطلقة العظمى $\|x\|_1 = \max | x_i |$

2– النظيم الثاني: هو مجموع القيم المطلقة $\|x\|_2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

3– النظيم الثالث: هو النظيم الإقليدي: $\|x\|_3 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

حيث أن x هو متجه في الفضاء R^n .

نعرف النظيم الإقليدي من المرتبة K بالشكل التالي: $\|x\|_k = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^k \right)^{\frac{1}{k}}$

مثال:

أوجد النظيم الأول والثاني والثالث أي : $\|x\|_1$ و $\|x\|_2$ و $\|x\|_3$ ، للمتجه $x=(2 , 3 , 6)$

$\|x\|_1 = \max(2 , 3 ,6) = 6$
$\|x\|_2 = 2+3+6 = 11$
$\|x\|_3 = (4+9+36)^{1/2} = (49)^{1/2} = 7$

2– الطرائق غير المباشرة لحل جمل المعادلات الجبرية الخطية:

تســـمى هذه الطرائق بطرائق التقريبات المتتالية أو الطرائق التكرارية وتســـتخدم عندما يكون عدد المعادلات كبيرا حيث يصـــعب حلها بالطرائق المباشـــرة من هذه الطرائق: 1– طريقة جاكوبي (التقريبات المتتالية البسيطة). 2– وطريقة غاوص سايدل. 3– طريقة كروت. 4– طريقة التدرج Gradient 5– طريقة الاتجاهات المتناوبة وغيرها.

1– طريقة جاكوبي(طريقة التقريبات المتتالية البسيطة):

تطبق هذه الطريقة عندما تكون عناصـــر القطر الرئيســـي في مصـــفوفة الأمثال A غير معدومة، أي عندما يكون $a_{ii} \neq 0$ و $i=1,2,3,\ldots,n$ لنفرض أنه لدينا مجموعة المعادلات الخطية التالية:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

نحسب x_1 من المعادلة الأولى و x_2 من المعادلة الثانية وهكذا نحسب x_n من المعادلة الأخيرة، فنحصل على جملة المعادلات الخطبة التالية:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \left(\frac{1}{a_{11}}\right)[b_1 - a_{12}x_2 - \ldots\ldots - a_{1n}x_n] \\
x_2 &= \left(\frac{1}{a_{22}}\right)[b_2 - a_{21}x_1 - \ldots\ldots - a_{2n}x_n] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= \left(\frac{1}{a_{nn}}\right)[b_n - a_{n1}x_1 - \ldots\ldots a_{nn-1}x_{n-1}]
\end{aligned}
$$

إن مجموعة المعادلات السابقة تكتب بالشكل المصفوفي التالي(العلاقة 1):

$$X = \beta + \alpha X \qquad (1)$$

حيث أن:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \dots\dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \dots\dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \dots\dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots\dots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad , \quad i \neq j \quad , \quad \beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

بفرض أن $x^{(0)}$ هو حل ابتدائي من العلاقة (1) نجد أن الحل التقريبي الأول يعطى بالشكل التالي:

$$X^{(1)} = \beta + \alpha X^{(0)}$$

ونستخدم $x^{(1)}$ من أجل إيجاد $x^{(2)}$ أي: $X^{(2)} = \beta + \alpha X^{(1)}$

وهكذا بشكل عام نكتب العلاقة (2) بالشكل:

$$X^{(k+1)} = \beta + \alpha X^{(k)} \qquad (2)$$

وبالتالي يمكن كتابة العلاقة(الدستور) (2) بالشكل التالي:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)}$$

وهكذا نستمر بالحساب حتى تتحقق المتراجحة:

$$\max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon \qquad (3)$$

حيث أن ε عدد صغير موجب.

شروط تقارب الحل بطريقة جاكوبي تكتب بالشكل التالي:

يتقارب الحل بطريقة جاكوبي(طريقة التكرارات البســيطة) إذا كان من أجل المصــفوفة α بتحقق أحد الشروط التالية:

1- $\max_{i} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$

2- $\max_{j} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$

3- $\left(\sum_{i,j=1}^{n} {\alpha_{ij}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} < 1$

حيث أن: $\alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$ ، بشرط $a_{ii} \neq 0$.