3- طريقة غوص:

وتسمى أيضا طريقة الحذف المتتالي ، أو الحذف الغوصي.

من أجل جملة المعادلات الخطية(1) المؤلفة من n من المعادلات الخطية و n من المجاهيل.

نكتب المصفوفة الموسعة بالشكل:

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} & b_2 \\ ...... & ...... & .... & ...... & ...... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

من أجل إيجاد حل جملة المعادلات الخطية بطريقة غاوص نجري عدد من التحويلات الأولية على أسطر المصفوفة الموسعة بهدف تحويلها إلى مصفوفة متدرجة(مثلثية)، تكافئ الجملة الأصلية (1) (يتم تحويل العناصر الواقعة تحت القطر الرئيسي إلى أصفار قدر الإمكان).

ملاحظة:

سوف نرمز لرتبة المصفوفة A بالرمز $r(A)$ وهو عدد الأسطر غير الصفرية في المصفوفة المتدرجة بعد إجراء التحويلات الأولية بهدف تحويل المصفوفة A إلى مصفوفة متدرجة.

مثال:

أوجد بطريقة غاوص حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3-2x_4&=1\\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4&=2\\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4&=-5\\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4&=11 \end{aligned}$$

الحل:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & \vdots & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & \vdots & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & \vdots & -5 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & \vdots & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1\ ,\ r_4-2r_1]{r_2-2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & \vdots & -8 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & \vdots & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{-(r_2-r_3)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & \vdots & -8 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & \vdots & -8 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & \vdots & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4+7r_2]{r_3+4r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & \vdots & -8 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & \vdots & -40 \\ 0 & 0 & -18 & 54 & \vdots & -47 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4-r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & \vdots & -8 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & \vdots & -40 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & \vdots & -7 \end{bmatrix}$$

لنكتب الجملة التالية المكافئة للجملة الأصلية بالشكل:

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3-2x_4 &= 1 \\ x_2-2x_3+7x_4 &= -8 \\ -18x_3+36x_4 &= -40 \\ 18x_4 &= -7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x_1=\frac{2}{3}\ , \quad x_2=-\frac{43}{18}\ , \quad x_3=\frac{13}{9}\ , \quad x_4=-\frac{7}{18}$$

وهو المطلوب.

4- طريقة التحليل إلى عوامل:

تعتمد هذه الطريقة على تحليل مصــفوفة الأمثال A في الجملة الخطية AX=B (1) إلى جداء مصفوفتين مثلثيتين إحداهما مثلثيه عليا والأخرى مثلثيه سفلى. لكل من المصفوفتين الجزئيتين نفس مرتبة المصفوفةA . نرمز للمصفوفة المثلثية السفلى بـ L وللمصفوفة المثلثية العليا بـ U . وتصبح الجملة بالشكل:

$$L \cdot U \cdot X = B \quad (2)$$

نوجد حل جملة المعادلات الخطية المطلوبة على مرحلتين:

1-نحل جملة المعادلات الخطية $L \cdot Y = B \quad (3)$

2–نوجد حل جملة المعادلات الخطية (4) $U \cdot X = Y$

كل من الجملتين (3) و (4) خطية مثلثية الشكل سهلة الحل وذلك بالتعويض التراجعي أو التقدمي.

نكتب المصفوفة A بالشكل: $A = L \cdot U$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

في اختيار دولتل: نفترض أن عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة L متساوية وتساوي الواحد أي:

$$l_{11} = l_{22} = \dots = l_{nn} = 1$$

وفي اختيار تشولسكي: نفترض عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة U متساوية وتساوي الواحد أي:

$$u_{11} = u_{22} = \dots = u_{nn} = 1$$

سنعتمد في هذه الطريقة على طريقة اختيار تشولسكي.

طريقة تشولسكي :

أي نفترض أن $u_{11} = u_{22} = \dots = u_{nn} = 1$ أي أن عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة U متساوية و تساوي الواحد. بالتالي الدساتير التي تعين عناصر المصفوفتين L و U تكتب بالشكل:

$$(5) \quad \begin{cases} l_{i1} = a_{i1} \ ; \quad i = 1,2,\dots,n \\ l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \quad ; \ 1 < j \le i \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} u_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{l_{11}} = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}} \quad ; \quad j = 1,2,3,\ldots,n \\ u_{ij} = \dfrac{1}{l_{ii}}\left(a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \right) \quad ; \quad 1 < i < j \end{cases}$$

وعناصـــــر المتجه Y في العلاقة (3) تتعين بطريقة التعويض التراجعي ويمكن كتابة الدســـاتير بالشكل:

$$(7)\quad y_1 = \frac{b_1}{l_{11}} \qquad \& \qquad y_i = \frac{1}{l_{ii}}\left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k \right) \quad ; \quad i > 1$$

وعناصـــــر المتجه X والتي هي حل جملة المعادلات الخطية المطلوبة، والتي يمكن إيجادها من الدساتير التالية:

$$(8)\quad \begin{cases} x_n = y_n \\ x_i = y_i - \displaystyle\sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k \quad ; \quad i < n \end{cases}$$

مثال:

أوجد بطريقة التحليل إلى عوامل حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10$$
$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 5$$

الحل : لدينا

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \& \quad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

نعين عناصر المصفوفتين L و U باستخدام الدساتير (5) و (6)

نعين عناصر العمود الأول في المصفوفة L:

$l_{11} = a_{11} = 1 \quad ; \quad l_{21} = a_{21} = 1 \quad ; \quad l_{31} = a_{31} = 2$

نعين عناصر السطر الأول في المصفوفة U :

$$u_{11} = \frac{a_{11}}{l_{11}} = 1 \quad ; \quad u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = 2 \quad ; \quad u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = 3$$

حيث أن $u_{11} = u_{22} = u_{33} = 1$ العناصر القطرية في المصفوفة U.

نحسب عناصر العمود الثاني في المصفوفة L:

$$l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 3 - 1(2) = 1 \Rightarrow l_{22} = 1$$
$$l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12} = -1 - 2(2) = -5 \Rightarrow l_{32} = -5$$

نحسب عناصر السطر الثاني في المصفوفة U:

$$u_{23} = \frac{1}{l_{22}}(a_{23} - l_{21}u_{13}) = -2 - 1(3) = -5 \Rightarrow u_{23} = -5$$

نحسب عناصر العمود الثالث في L:

$$l_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 1 - 2(3) - 1(-5)(-5)$$
$$l_{33} = -30$$

وبالتالي تصبح عناصر المصفوفتين بالشكل:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & -30 \end{bmatrix} \quad \& \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وفقاً للعلاقة (3) يمكننا كتابة عناصر المتجه Y بالشكل:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & -30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

أو بالشكل:

$$y_1 = 10$$
$$y_1 + y_2 = 7$$
$$2y_1 - 5y_2 - 30y_3 = 5$$
$$\Rightarrow y_1 = 10 \quad \& \quad y_2 = -3 \quad \& \quad y_3 = 1$$

ووفقاً للعلاقة (4) نكتب ونوجد حل جملة المعادلات الخطية :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10$$
$$x_2 - 5x_3 = -3$$
$$x_3 = 1$$

وبالتعويض التراجعي نجد : $x_3 = 1 \quad \& \quad x_2 = 2 \quad \& \quad x_1 = 3$

وهو المطلوب .