;

تعقيد الخوارزميات – أمثلة

Algorithms Complexity

أمثلة:

مثال1:

خوارزمية حساب قيمة كثيرة حدود p(x) عند القيمة $x = x_0$.

الطريقة الأولى– الطريقة المباشرة: Direct Method

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots \cdots + a_1 x + a_0$$

حيث يتم تعويض كل x بـ x_0 فنحصل على قيمة كثيرة الحدود ولدينا A متجه(شعاع)حيث:

$$A = (a_0 , a_1 \ , \cdots \cdots , a_n \ )$$

خوارزمية الحل:

```
p=a[0];
for(i=1;i<=n;i++)
 if(a[i]!=0)
 {s=1;
  for(j=1;j<=i;j++)
    s=s*x0;
  p=p+s*a[i];
 }
```

برنامج الحل:

```
#include<iostream>
using namespace std;
int main()
{int n,a[100];
 int i,j,s,p,x0;
 cout<<"Enter number n<100:";
 cin>>n;
 cout<<"Enter n+1 numbers:\t";
```

```
 for(i=0;i<=n;i++)
    cin>>a[i];
 cout<<"Enter the value of x:";
 cin>>x0;
 p=a[0];
 for(i=1;i<=n;i++)
    if(a[i]!=0)
    {s=1;
     for(j=1;j<=i;j++)
       s=s*x0;
     p=p+s*a[i];
    }
 cout<<p;
 cout<<endl;
 return 0;
}
```

إن بعد المسألة هو n وهو درجة كثيرة الحدود.

في الخوارزمية يكون عدد عمليات الضرب في الحلقة الداخلية، ولتكن حلقة Q هو:

$$P_*(Q) = \sum_{j=1}^{i} 1 = i$$

و عدد عمليات الضرب في الحلقة الخارجية، ولتكن حلقة Q_1 هو:

$$P_*(Q_1) = \sum_{i=1}^{n} (i+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$$
$$= \frac{1}{2} n^2 + \frac{3}{2} n + 1 - 1 = O(n^2)$$

أما عدد عمليات الجمع في الحلقة الخارجية فقط، فهي:

$$P_+(Q_1) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n = O(n)$$

أي أن عدد عمليات الضرب هو من المرتبة $O(n^2)$.

وعدد عمليات الجمع هو من المرتبة $O(n)$. وهو المطلوب.

وتوجد طريقة أخرى لكتابة الخوارزمية السابقة بالشكل:

```
p=a[0];s=1;
for(i=1;i<=n;i++)
{s=s*x0;
 p=p+s*a[i];
}
```

الطريقة الثانية – طريقة هورنر: Horner Method

يمكن كتابة كثير الحدود بالشكل التالي:

$$P(x) = \left(\cdots\cdots\left(\left((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2}\right)x + a_{n-3}\right)x + \cdots + a_1\right)x + a_0$$

خوارزمية هورنر:

```
p=a[n];
for(i=n;i>=1;i--)
  p=p*x0+a[i-1];
```

نرمز للحلقة بالرمز S. أن عدد عمليات الضرب هو من المرتبة $O(n)$. حيث: $P_*(S) = n$ ، و

عدد عمليات الجمع هو من المرتبة $O(n)$. حيث: $P_+(S) = n$

مما تقدم نجد أن عدد عمليات الضرب في الطريقة المباشرة هو أكبر بكثير من عدد عمليات الضرب في طريقة هورنر.

وبالتالي ينصح باستخدام طريقة هورنر في التطبيقات العملية لكونها أقل عدد من العمليات.

مثال2:

ليكن لدينا خوارزمية A_1 وA_2 لنفس المسألة ولنفرض أنه في أسوأ الأحوال تعقيدهما هو $P_1(n)=100\ n$ و $P_2(n)=4\ n^2$ على الترتيب، والسؤال أي من الخوارزميتين أفضل من الأخرى A_1 أو A_2، ومن أجل أي قيم.

الحل:

نلاحظ أنه من أجل $n \leq 25$ لدينا : $P_1(n) = 100\,n \geq 4n^2 = P_2(n)$

أي أن الخوارزمية A_2 هي أفضل من الخوارزمية A_1.

ومن أجل $n > 25$ فإن الخوارزمية A_1 هي الأفضل.

نعلم أن: $e^0 = 1 \Leftrightarrow \ln 1 = 0$, $e^{-\infty} = 0 \Leftrightarrow \ln 0 = -\infty$ وأيضا لدينا: